

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Total	Nota

Instrucciones:

- **NO HAY CONSULTAS.** Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

$$\text{Nota} = 1 + \frac{\text{Puntos}}{10}.$$

Duración = 60 minutos

1) [25 pts]

a) [5 pts] ¿Es $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y \text{ ó } x = z\}$ un **subespacio vectorial** de $\mathbb{R}^3$?

b) [10 pts] Dado $U = \{2x^2 + 3x - 4, x^2 - 2x + 3\} \subset \mathcal{P}_2$, determine si $4x^2 - 6x + 1$ **pertenece o no** al subespacio generado por U .

c) [10 pts] Encuentre la **ecuación de la recta** L_1 que pasa por el punto $P = (1, 1, 0)$ y es perpendicular a la recta $L : x - 1 = y = \frac{1 - z}{2}$

2) [35 pts] Sea $V = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de las matrices de 2×2 , con coeficientes reales, con las operaciones usuales de suma de matrices y producto de una matriz por un escalar. Sean

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : a + b = 0 \right\} \quad \text{y} \quad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -x & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

a) [10 pts] Encuentre una **base** de W_1 y W_2 , indicando las respectivas **dimensiones** de cada subespacio.

b) [10 pts] Encuentre una **base** y la **dimensión** de $W_1 \cap W_2$.

c) [5 pts] Encuentre la **dimensión** de $W_1 + W_2$.

d) [10 pts] **Complete una base** de W_1 para obtener una base de V . (**Justifique su respuesta**).

Pauta :

- 1) a) El conjunto A es la unión de dos planos vectoriales y no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Para ello, basta escoger dos vectores que estén en A y cuya suma no pertenezca en A . Por ejemplo, sean $\vec{u} = (1, 1, 0) \in A$ y $\vec{v} = (1, 2, 1) \in A$. es claro que $\vec{u} + \vec{v} \notin A$

b) $c_1(2x^2 + 3x - 4) + c_2(x^2 - 2x - 3) = 4x^2 - 6x + 1 \implies \begin{cases} 2c_1 + c_2 = 4 \\ 3c_1 - 2c_2 = -6 \\ -4c_1 - 3c_2 = 1 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -6 \\ -4 & -3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -10 \\ 3 & -2 & -6 \\ -4 & -3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -10 \\ 0 & 7 & 24 \\ 0 & 15 & -39 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2/7 \\ 0 & 1 & 24/7 \\ 0 & 0 & 87/7 \end{array} \right)$$

La última igualdad $0 = 87/7$ indica que el sistema es inconsistente, entonces no existen c_1, c_2 que permitan expresar el polinomio como combinación lineal de U , es decir el polinomio no está en el espacio generado por U .

- c) ■ Notemos que

$$L = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

y su vector director es $\vec{d} = (1, 1, -2)$.

- Consideremos un punto arbitrario $P_1 = (1 + t, t, 1 - 2t)$ en L , donde $P_1P \perp \vec{d}$, es decir

$$P_1P \cdot \vec{d} = 0 \implies (-t, 1 - t, 2t - 1) \cdot (1, 1, -2) = 0 \implies t = \frac{1}{2}$$

- Así el vector director $\vec{d}_1$ de la recta L_1 pedida es: $\vec{d}_1 = P_1P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

De donde,

$$L_1 : \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2} \cdot t \\ y = 1 + \frac{1}{2} \cdot t \\ z = 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

2) a) ■ base W_1 : Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W_1$, luego

$$A = \begin{pmatrix} a & -a \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es l.i y $W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Por lo tanto

$$\mathcal{B}_{W_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de W_1 , de $\dim(W_1)=3$.

■ base W_2 : Sea $B = \begin{pmatrix} x & y \\ -x & z \end{pmatrix} \in W_2$, luego

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ -x & z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es l.i y $W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Por lo tanto

$$\mathcal{B}_{W_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de W_2 , de $\dim(W_2)=3$.

b) La caracterización para el espacio intersección es :

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : a + b = 0 \wedge a + c = 0 \right\}$$

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W_1 \cap W_2 \quad \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es l.i y $W_1 \cap W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Por lo tanto

$$\mathcal{B}_{W_1 \cap W_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de $W_1 \cap W_2$, de $\dim(W_1 \cap W_2)=2$.

c) Por la fórmula de la dimensión

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2) = 3 + 3 - 2 = 4$$

d) Basta considerar

$$\mathcal{M}_{2 \times 2} = \left\langle \mathcal{B}_{W_1} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

la cual es una base de $\mathcal{M}_{2 \times 2}$, pues $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
es l.i